

Técnicas Experimentales I

Laboratorio Básico

Práctica 7:

Campo Magnético creado por dos Bobinas Paralelas (Bobinas Helmholtz)

Pedro Martínez Caamaño

1· Objetivos

Tendremos dos objetivos a obtener a lo largo de este experimento.

El primero de ellos será medir el campo magnético generado por las dos bobinas en función de la distancia entre estas así como del sensor a distintos puntos de un mismo eje. Tras ello, se representará gráficamente para ver su parecido con los valores predichos por la ecuación de la teoría.

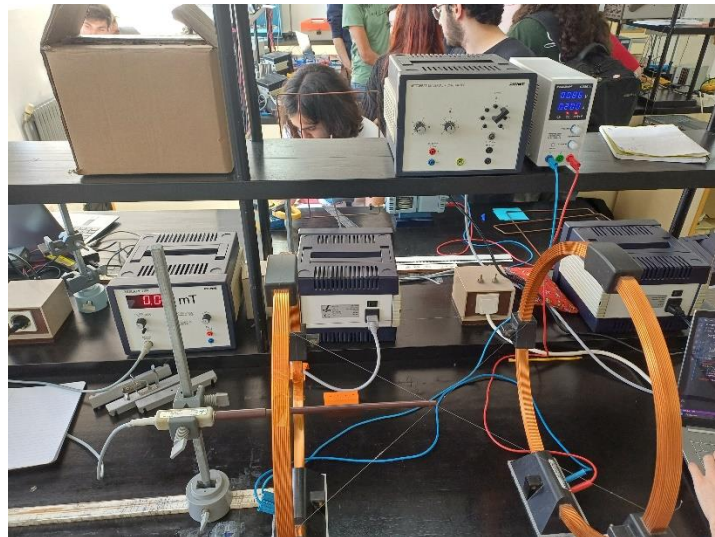
El segundo objetivo será calcular la constante de permeabilidad magnética del vacío, que representa una de las constantes fundamentales en el ámbito del electromagnetismo.

2· Material

Los instrumentos necesarios para alcanzar dichos objetivos son los siguientes:

- Dos bobinas.
- Fuente de corriente eléctrica.
- Amperímetro (o selector tal en polímetro).
- Metro de medir fijado a la mesa, otro metro libre para tomar medidas adicionales.
- Teslámetro con sonda Hall axial para medir el campo magnético.
- Cuerda o hilo, la usaremos para tomar el punto central entre bobinas.
- Amarraderas de distintos tamaños para marcar la distancia exacta entre bobinas.

Veamos una representación de como podría situarse tal equipo.



3· Procedimiento

Tendremos dos partes, con dos objetivos distintos; es por ello que dividiremos el procedimiento y nuestras instrucciones en dos apartados.

Parte 1

El objetivo, ya mencionado antes, es medir y representar las curvas del campo magnético generado por las bobinas frente a la distancia, en un eje, al punto central del sistema de las dos bobinas.

La fórmula principal que utilizaremos, que representa tal campo en el eje z (siendo z la normal a la superficie de las tapas del sistema cilíndrico de ambas bobinas) es la siguiente:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z - \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z + \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Ecuación 1

Donde los parámetros son:

- μ_0 : Constante de Permeabilidad magnética en el vacío. Vale $4\pi \cdot 10^{-7}$.
- R : Radio de las bobinas (ambas son idénticas), será en nuestro caso de 0,20 m.
- a : Distancia entre las dos bobinas, irá variando para distintas medidas, pero será entre 10 cm, 20 y 40 cm.
- I : Intensidad que circula por las bobinas. En la primera parte será constante, valiendo $2,500 \pm 0,001$ A.
- N : Número de espiras o vueltas que posee la bobina, en nuestro caso, 154.
- z : Distancia entre el punto central de ambas bobinas (que tomaremos como 0) y la sonda de medida del teslámetro. Este será siempre en el mismo eje.

Y su incertidumbre teórica se podría observar de la siguiente aparatosa manera:

$$s(B) = \sqrt{s^2(I) \cdot \left(\frac{M \cdot N \cdot \left(\frac{1}{\left(z + \frac{a}{2R}\right)^2 \cdot \left|z + \frac{a}{2R}\right| + 1} + \frac{1}{\left(z - \frac{a}{2R}\right)^2 \cdot \left|z - \frac{a}{2R}\right| + 1} \right)}{2R} \right)^2 + s^2(z) \cdot \left(\frac{I \cdot M \cdot N}{2R} \cdot \left(-\frac{3 \left(x + \frac{a}{2R}\right) \cdot \left|x + \frac{a}{2R}\right|}{\left(\left(x + \frac{a}{2R}\right)^2 \cdot \left|x + \frac{a}{2R}\right| + 1\right)^2} - \frac{3 \left(x - \frac{a}{2R}\right) \cdot \left|x - \frac{a}{2R}\right|}{\left(\left(x - \frac{a}{2R}\right)^2 \cdot \left|x - \frac{a}{2R}\right| + 1\right)^2} \right) \right)^2}$$

Ecuación 2

Ahora bien, hay otra manera de calcular el error asociado al teórico, y este es comparando cada punto de la gráfica que formaremos con los datos experimentales, con el punto esperado teóricamente de la fórmula 1. Así, la desviación cuadrática de las medidas experimentales sería la siguiente:

$$s = \left(\frac{\sum (B_{exp} - te\acute{o}rico)^2}{N} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ecuación 3

Es decir, que haciendo uso de estas tres fórmulas tendremos que medir el campo magnético a lo largo de un eje respecto a las bobinas en tres situaciones totales. La primera será separando ambas bobinas 20 cm, para el segundo caso se separará 10 cm; estos dos serán haciendo uso de unos soportes que ya tenemos en laboratorio. Para el tercer caso, separaremos las bobinas 40 cm con precisión y cuidado, pues, en nuestro caso, no disponemos de tales agarraderas. Para cada caso, lo primero que haremos será, con la cuerda formando una cruz pasando a través de todas las partes de las bobinas, encontrar el centro. A continuación, colocaremos la sonda con su eje fijo de forma perpendicular a las bobinas para que pueda deslizarse sin desviarse demasiado de tal eje. Tras ello, con la corriente ya circulando, tomaremos medidas cada medio centímetro desde el centro hacia fuera en un lado y luego intentando completar para el otro lado. Con esto hecho solo quedará organizar y tratar y representar los datos. Una vez acabado obtendremos y podremos comparar los resultados con los esperados.

Parte 2

En este nuevo caso, se tomarán menos medidas y será más sencillo. El procedimiento será, con todo el sistema montado igual que en el resto de pruebas anteriores, mantendremos la sonda del teslámetro fija en $z=0$ y, con un cierto a , que variaremos al igual que en la parte anterior en tres secciones diferentes con las bobinas a distintas distancias, siendo a o $2R$, R o $R/2$. La variable principal de este apartado será la intensidad, la iremos alterando a intervalos de 0.2 Amperios desde 0 hasta 3.2 Amperios. Mediremos el campo magnético y lo representaremos frente a la intensidad para obtener una recta de cuya pendiente podremos obtener la constante de permeabilidad magnética en el vacío. Para ello haremos uso de la siguiente ecuación:

$$\mu_0 = \frac{2 \cdot B \cdot R}{I \cdot N} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z - \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z + \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right]^{-1}$$

Ecuación 4

Y, dando uso a esa ecuación, podremos obtener la incertidumbre con la siguiente fórmula.

$$s(\mu_0) = \sqrt{s^2(I) \cdot \left(\frac{2B \cdot R}{N \cdot I^2 \cdot \left(\left(1 + \frac{a^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)} \right)^2 + s^2(B) \cdot \left(\frac{2R}{N \cdot I \cdot \left(\left(1 + \frac{a^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)} \right)^2}$$

Ecuación 5

Que será para cada punto por lo que haríamos una media cuadrada. Intentaremos para todas las partes, tomar siempre tres cifras significativas.

4- Datos y Análisis de Datos

Comenzamos ahora mostrando los datos obtenidos y sus operaciones y representaciones.

Parte 1

Ya sabemos que tenemos distintas medidas y gráficas según la distancia entre bobinas, así que iremos por el orden de realización en el laboratorio. Cabe que decir que habrá elementos que supondremos constantes y con incertidumbre nula, como el radio, el número de espiras o la distancia entre bobinas.

Para $a = 0.2\text{ m}$

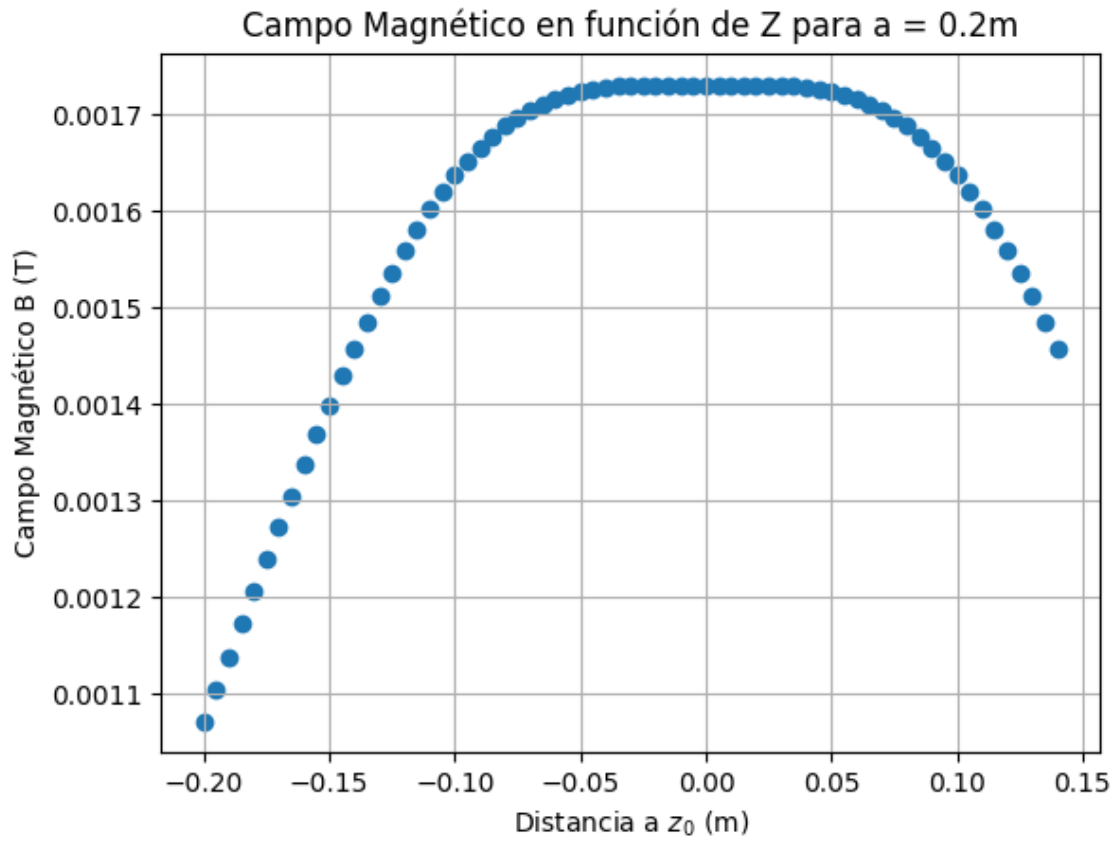
Los datos en crudo son los siguientes, 72 medidas:

Campo Magnético ($\pm 0,00001$ T)	Distancia al centro, z ($\pm 0,001$ (m))
0,00100	-0,2
0,00103	-0,20
0,00107	-0,19
0,00109	-0,185
0,00113	-0,18
0,00116	-0,175
0,00119	-0,17
0,00123	-0,165
0,00126	-0,16
0,00129	-0,155
0,00133	-0,15
0,00135	-0,145
0,00138	-0,14
0,00141	-0,135
0,00144	-0,13
0,00149	-0,125
0,00151	-0,12
0,00153	-0,115
0,00155	-0,11
0,00157	-0,105
0,00159	-0,1
0,00160	-0,095
0,00161	-0,09

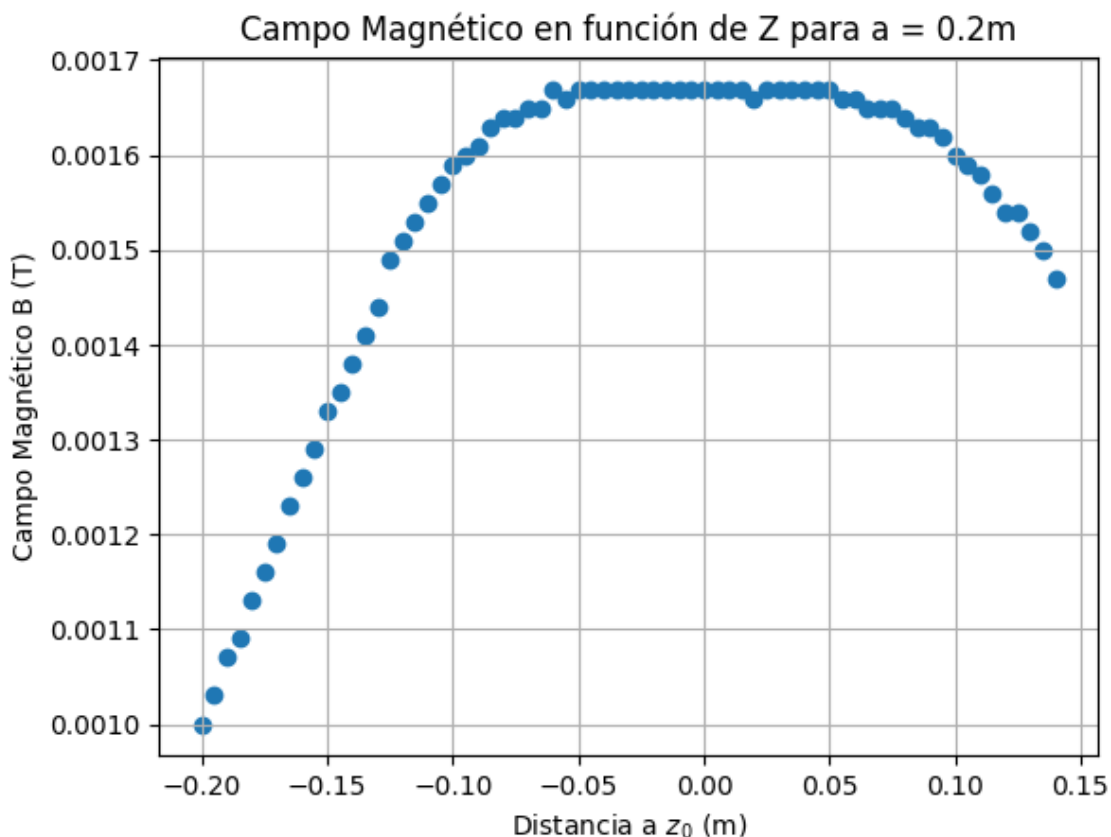
0,00163	-0,085
0,00164	-0,08
0,00164	-0,075
0,00165	-0,07
0,00165	-0,065
0,00167	-0,06
0,00166	-0,055
0,00167	-0,05
0,00167	-0,045
0,00167	-0,04
0,00167	-0,035
0,00167	-0,03
0,00167	-0,025
0,00167	-0,02
0,00167	-0,015
0,00167	-0,01
0,00167	-0,005
0,00167	0
0,00167	0,005
0,00167	0,01
0,00167	0,015
0,00166	0,02
0,00167	0,025
0,00167	0,03
0,00167	0,035
0,00167	0,04
0,00167	0,045
0,00167	0,05
0,00166	0,055
0,00166	0,06
0,00165	0,065
0,00165	0,07
0,00165	0,075
0,00164	0,08
0,00163	0,085
0,00163	0,09
0,00162	0,095
0,00160	0,1
0,00159	0,105
0,00158	0,11
0,00156	0,115
0,00154	0,12
0,00154	0,125
0,00152	0,13
0,00150	0,135
0,00147	0,14

Tabla de Campo Magnético en función de la distancia.

Su representación gráfica y la gráfica con los valores esperados (calculados con la ecuación 1) son las siguientes:



Gráfica con los valores experimentales del campo magnético frente a la distancia.



Gráfica con los valores teóricos del campo magnético frente a la distancia.

Y, calculando la media cuadrada de las incertidumbres de la propagación de errores (ecuación 2), la incertidumbre comparada a los valores esperados (ecuación 3) y la incertidumbre del detector; para obtener una incertidumbre completa y sólida a todos sus factores, obtendríamos:

$$s(B) = 6,13 \cdot 10^{-5} T$$

Podríamos apreciar que la gráfica es muy similar a la esperada pero ligeramente movida en el eje y. Esto se puede deber a las diversas incertidumbres de las variables, sobre todo de la fuente de energía que, como hemos observado en otras sesiones en laboratorio, no siempre da lo que muestra, y si hacemos los cálculos, una intensidad ligeramente superior a la esperada nos cambiaría la gráfica de esta manera.

Para a = 0.1 m

Esta vez, los 62 datos obtenidos son:

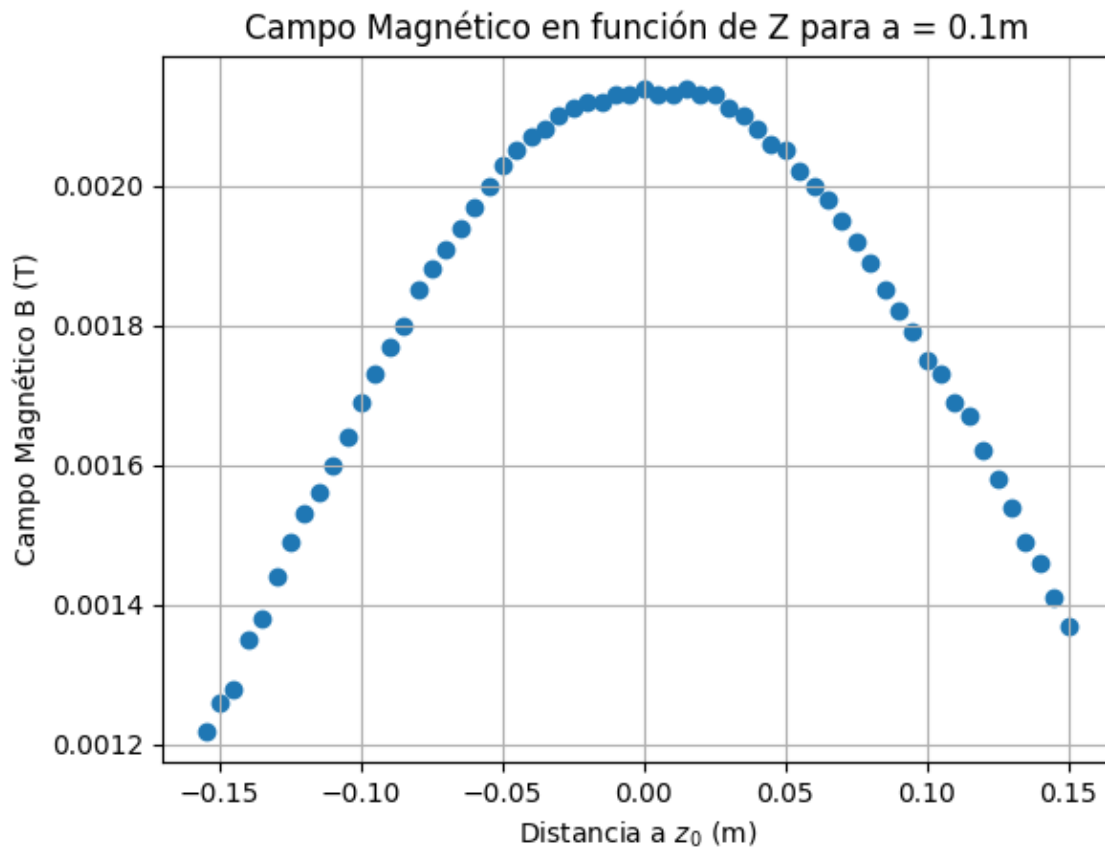
Campo Magnético ($\pm 0,00001$ T)	Distancia al centro, z ($\pm 0,001$ m)
0,00122	-0,155
0,00126	-0,15
0,00128	-0,145

0,00135	-0,14
0,00138	-0,135
0,00144	-0,13
0,00149	-0,125
0,00153	-0,12
0,00156	-0,115
0,00160	-0,11
0,00164	-0,105
0,00169	-0,1
0,00173	-0,095
0,00177	-0,09
0,00180	-0,085
0,00185	-0,08
0,00188	-0,075
0,00191	-0,07
0,00194	-0,065
0,00197	-0,06
0,00200	-0,055
0,00203	-0,05
0,00205	-0,045
0,00207	-0,04
0,00208	-0,035
0,00210	-0,03
0,00211	-0,025
0,00212	-0,02
0,00212	-0,015
0,00213	-0,01
0,00213	-0,005
0,00214	0
0,00213	0,005
0,00213	0,01
0,00214	0,015
0,00213	0,02
0,00213	0,025
0,00211	0,03
0,00210	0,035
0,00208	0,04
0,00206	0,045
0,00205	0,05
0,00202	0,055
0,00200	0,06
0,00198	0,065
0,00195	0,07
0,00192	0,075
0,00189	0,08
0,00185	0,085

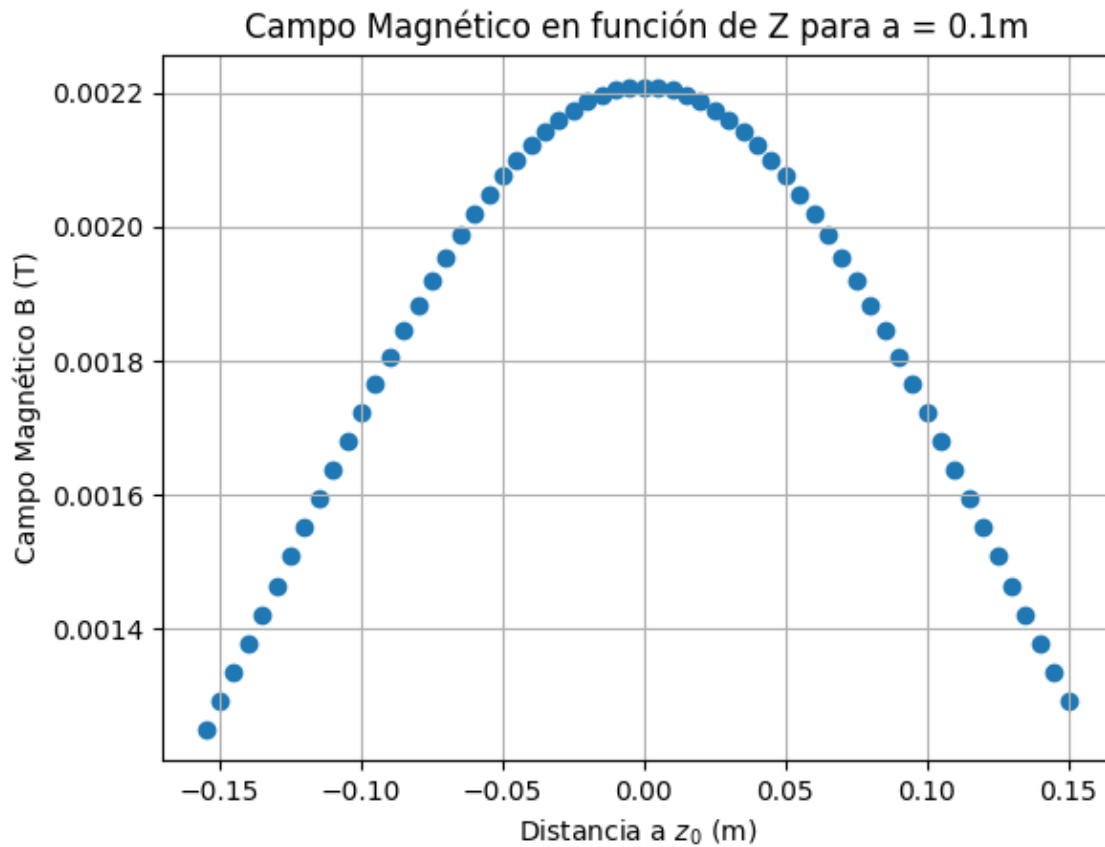
0,00182	0,09
0,00179	0,095
0,00175	0,1
0,00173	0,105
0,00169	0,11
0,00167	0,115
0,00162	0,12
0,00158	0,125
0,00154	0,13
0,00149	0,135
0,00146	0,14
0,00141	0,145
0,00137	0,15

Tabla de Campo Magnético en función de la distancia.

Las gráficas teóricas y experimentales serían las siguientes:



Gráfica con los valores experimentales del campo magnético frente a la distancia.



Gráfica con los valores teóricos del campo magnético frente a la distancia.

Se comentaría lo mismo que en el apartado anterior ya que el contexto fue casi idéntico. Ahora, con nuestro código, podríamos pedir la incertidumbre, que resultaría en:

$$s(B) = 5,43 \cdot 10^{-5} T$$

Para a = 0.4 m

Ahora mostramos los 72 valores con los que formaremos las gráficas:

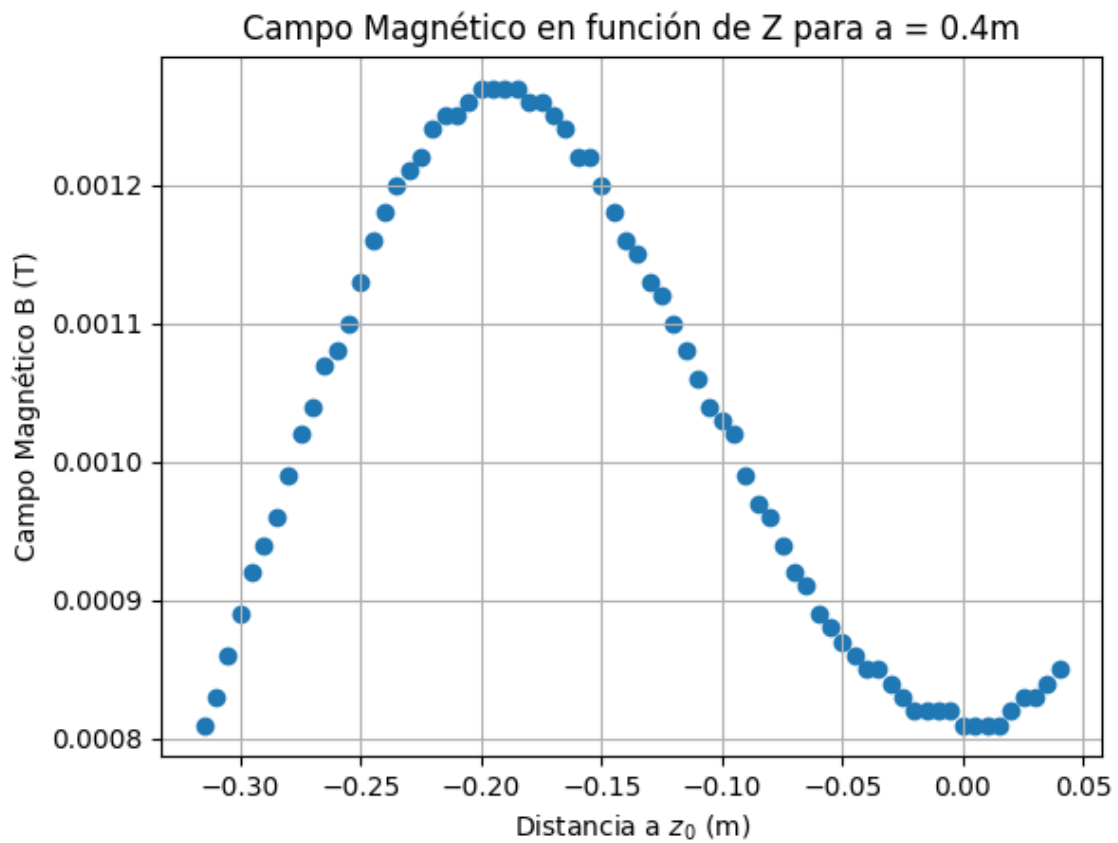
Campo Magnético ($\pm 0,00001$ T)	Distancia al centro, z ($\pm 0,001$ m)
0,00081	-0,315
0,00083	-0,31
0,00086	-0,305
0,00089	-0,3
0,00092	-0,295
0,00094	-0,29
0,00096	-0,285
0,00099	-0,28
0,00102	-0,275
0,00104	-0,27
0,00107	-0,265

0,00108	-0,26
0,00110	-0,255
0,00113	-0,25
0,00116	-0,245
0,00118	-0,24
0,00120	-0,235
0,00121	-0,23
0,00122	-0,225
0,00124	-0,22
0,00125	-0,215
0,00125	-0,21
0,00126	-0,205
0,00127	-0,2
0,00127	-0,195
0,00127	-0,19
0,00127	-0,185
0,00126	-0,18
0,00126	-0,175
0,00125	-0,17
0,00124	-0,165
0,00122	-0,16
0,00122	-0,155
0,00120	-0,15
0,00118	-0,145
0,00116	-0,14
0,00115	-0,135
0,00113	-0,13
0,00112	-0,125
0,00110	-0,12
0,00108	-0,115
0,00106	-0,11
0,00104	-0,105
0,00103	-0,1
0,00102	-0,095
0,00099	-0,09
0,00097	-0,085
0,00096	-0,08
0,00094	-0,075
0,00092	-0,07
0,00091	-0,065
0,00089	-0,06
0,00088	-0,055
0,00087	-0,05
0,00086	-0,045
0,00085	-0,04
0,00085	-0,035

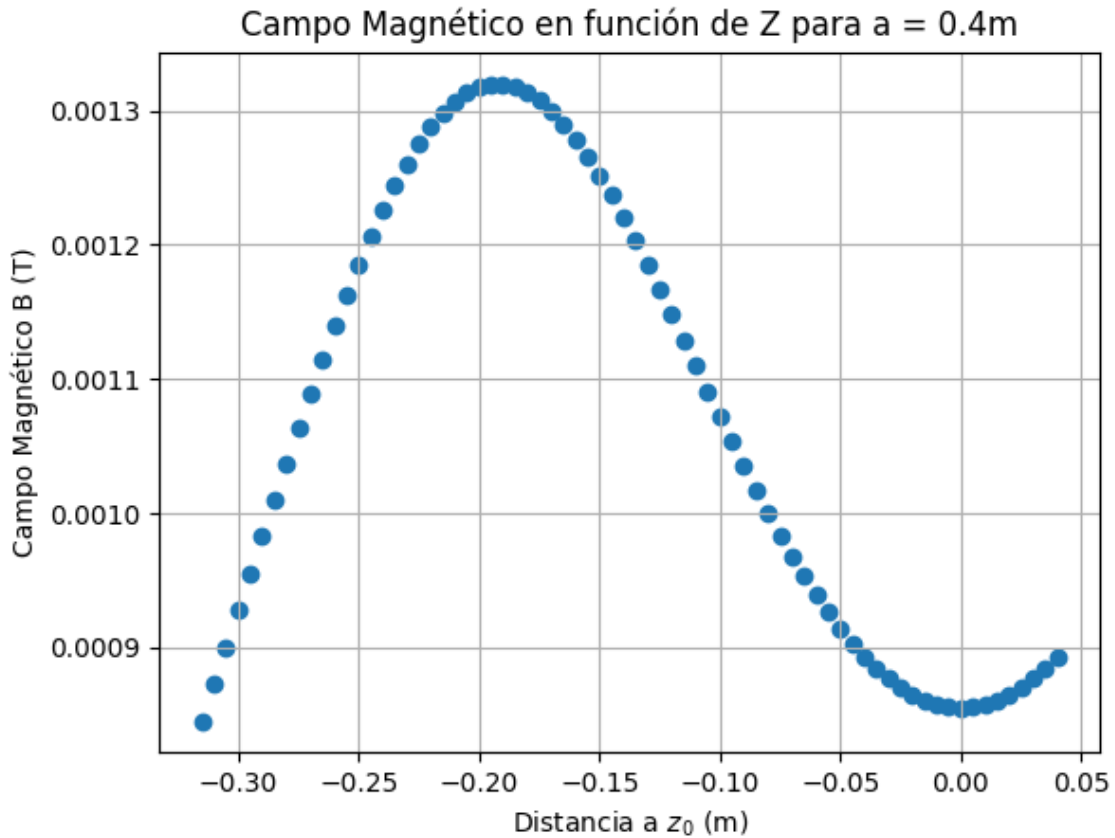
0,00084	-0,03
0,00083	-0,025
0,00082	-0,02
0,00082	-0,015
0,00082	-0,01
0,00082	-0,005
0,00081	0
0,00081	0,005
0,00081	0,01
0,00081	0,015
0,00082	0,02
0,00083	0,025
0,00083	0,03
0,00084	0,035
0,00085	0,04

Tabla de Campo Magnético en función de la distancia.

Con su transformación gráfica, obtenemos:



Gráfica con los valores experimentales del campo magnético frente a la distancia.



Gráfica con los valores teóricos del campo magnético frente a la distancia.

Y su incertidumbre resulta valer:

$$s(B) = 5,14 \cdot 10^{-5} T$$

Parte 2

Es momento, pues, de, haciendo uso de la ecuación 4, calcular la constante de permeabilidad magnética en el vacío. Para ello, como explicamos en la sección de procedimientos, produciremos una gráfica la cual será ajustada por el método de los mínimos cuadrados, es decir, regresión lineal (sin término independiente, ya que pasa por el 0, como es trivial). Nos dará un valor constante, resulta que siguiendo la ecuación de a continuación podremos sacar lo que buscamos.

$$\mu_0 = (cte.) \cdot \frac{2 \cdot R}{N} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z - \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z + \frac{a}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right]^{-1}, cte. = \frac{B}{I}$$

Ecuación 6

También calcularemos la incertidumbre con la ecuación 5 y mostraremos los resultados obtenidos y procesados por el código programado.

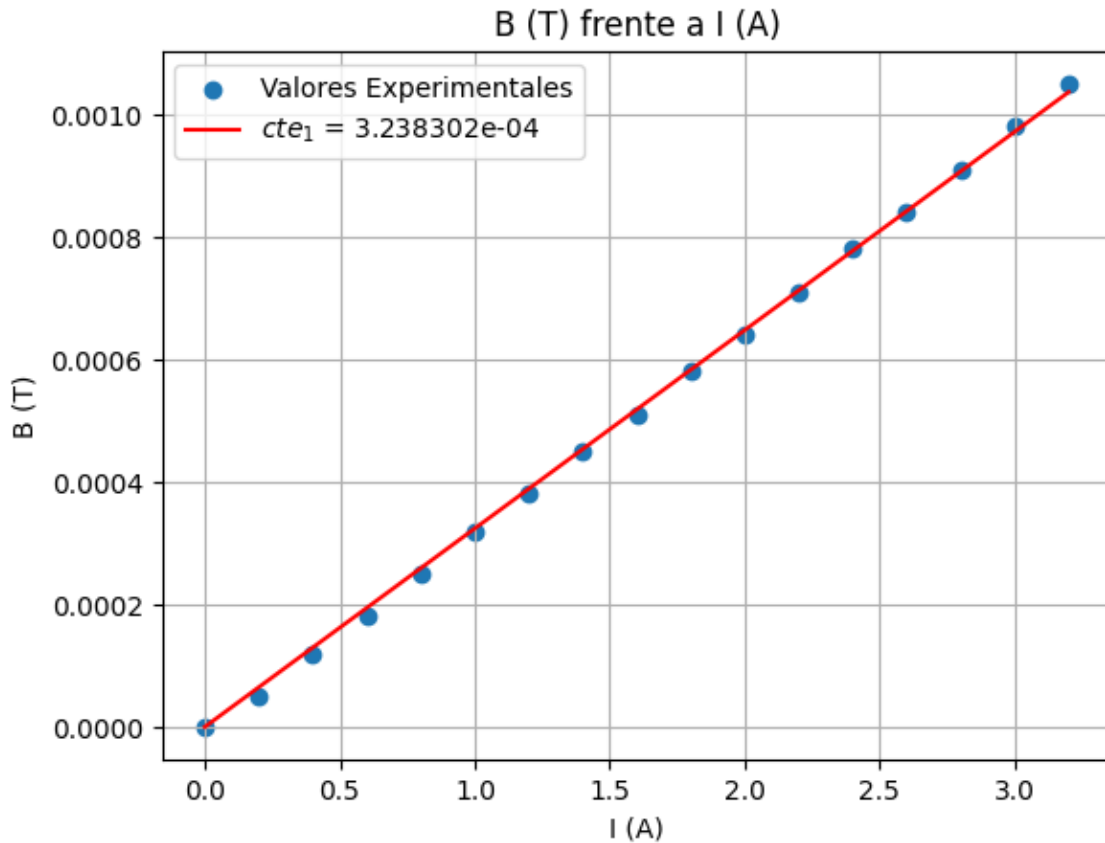
Para a = 0.4 m

Los 17 valores del campo magnético en el punto $z = 0$ en función de una intensidad variable han sido:

Campo Magnético ($\pm 0,00001$ T)	Intensidad ($\pm 0,001$ A)
0,00000	0
0,00005	0,2
0,00012	0,4
0,00018	0,6
0,00025	0,8
0,00032	1
0,00038	1,2
0,00045	1,4
0,00051	1,6
0,00058	1,8
0,00064	2
0,00071	2,2
0,00078	2,4
0,00084	2,6
0,00091	2,8
0,00098	3
0,00105	3,2

Tabla de Campo Magnético en función de la intensidad.

Cuya gráfica se muestra de la siguiente manera:



Gráfica con los valores del campo magnético frente a la Intensidad.

Los datos asociados a tal regresión parecen muy buenos y son los siguientes.

cte_1:	3.238302e-04
S(cte_1):	1.0806559473542402e-06
Desviación Típica:	8.359556556951876e-06
r:	0.9999109216596249
μ :	1.1895196893736476e-06
s(μ):	1.0275598955989253e-07

Es decir, que podríamos decir que μ vale:

$$\mu = (1,19 \pm 0,10) \cdot 10^{-6}$$

Para a = 0.2 m

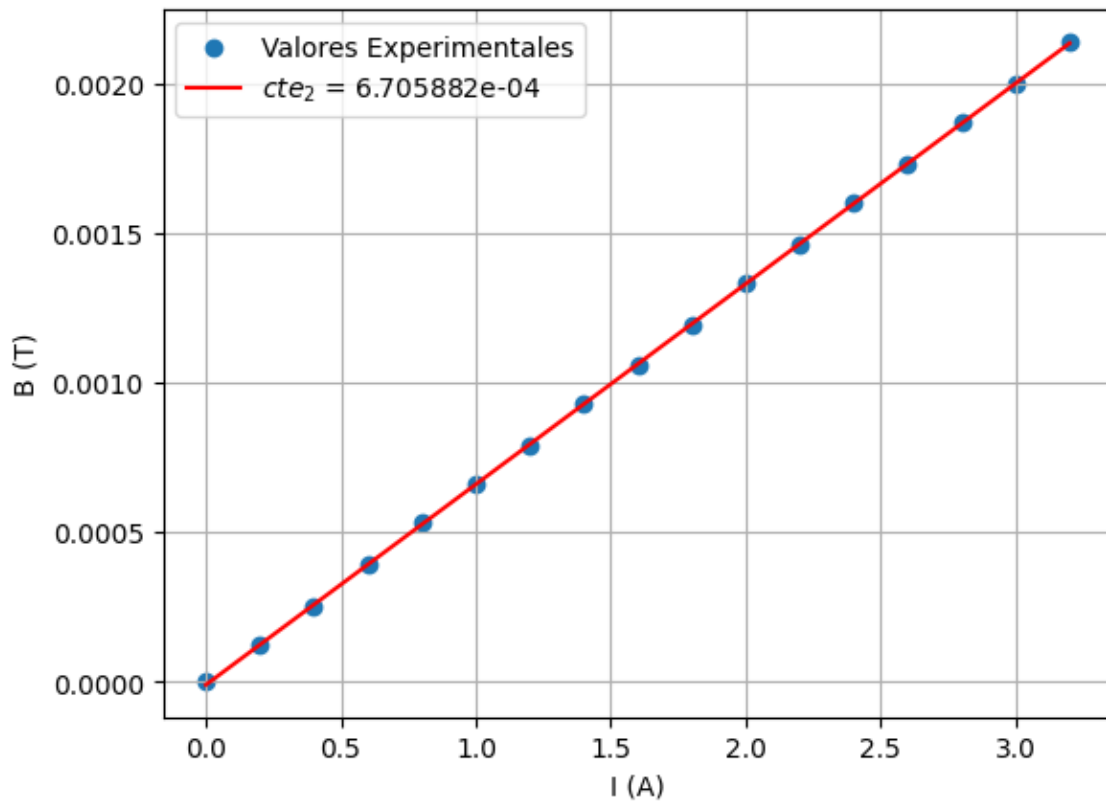
La tabla en este caso, de mismo número de tomas, tocaría ser:

Campo Magnético	Intensidad ($\pm 0,001A$)
-----------------	-----------------------------

($\pm 0,00001$ T)	
0,00000	0
0,00012	0,2
0,00025	0,4
0,00039	0,6
0,00053	0,8
0,00066	1
0,00079	1,2
0,00093	1,4
0,00106	1,6
0,00119	1,8
0,00133	2
0,00146	2,2
0,00160	2,4
0,00173	2,6
0,00187	2,8
0,00200	3
0,00214	3,2

Tabla de Campo Magnético en función de la intensidad.

Graficándolo y representando su recta de tendencia, obtenemos:



Gráfica con los valores del campo magnético frente a la Intensidad.

Nuestros resultados son:

cte_2: 6.705882e-04

S(cte_2): 3.1654675080318924e-06

a: -1.1176470588235745e-05

S(a): 5.938943474752715e-06

Desviación Típica:1.2787861891837121e-05

r: 0.9999775579525771

μ : 1.217111103108174e-06

s(μ): 1.5479392103767818e-07

Por lo que tomamos la constante como:

$$\mu = (1,22 \pm 0,15) \cdot 10^{-6}$$

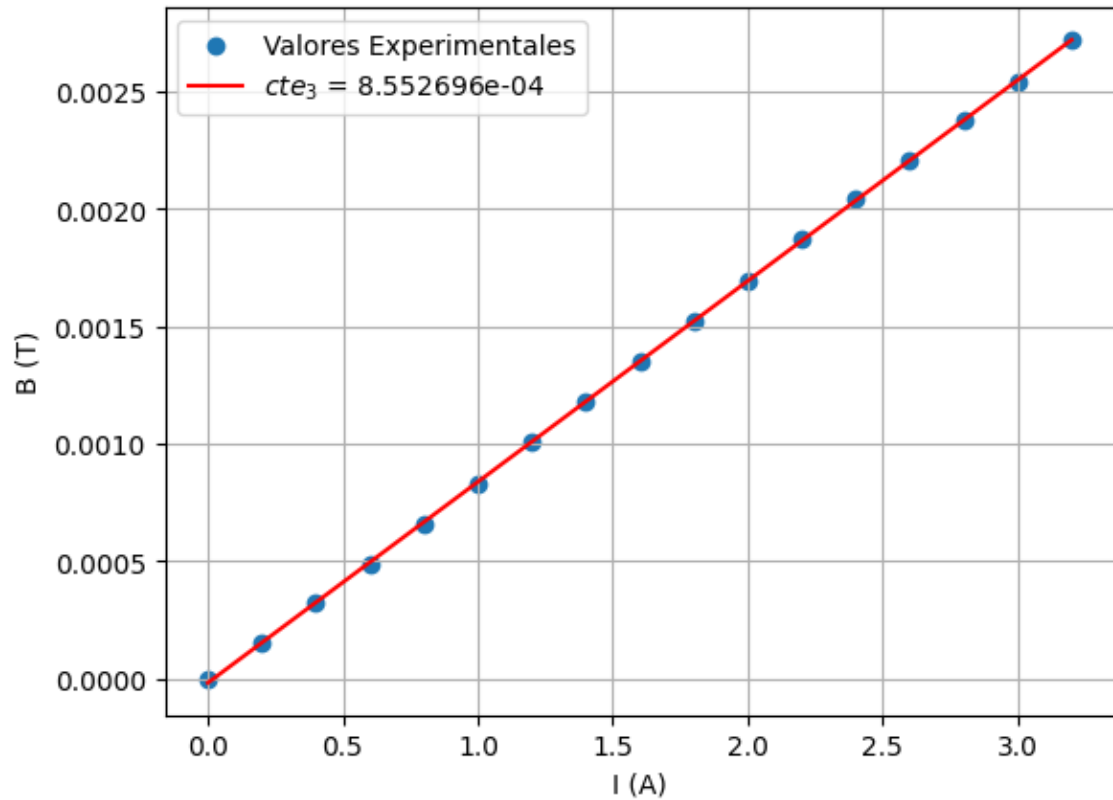
Para a = 0.1 m

Tenemos pues, el siguiente conjunto de valores presos en un espacio de forma rectangular al que someteremos a prejuicios y sistematización:

Campo Magnético ($\pm 0,00001$ T)	Intensidad ($\pm 0,001$ A)
0,00000	0
0,00015	0,2
0,00032	0,4
0,00049	0,6
0,00066	0,8
0,00083	1
0,00101	1,2
0,00118	1,4
0,00135	1,6
0,00152	1,8
0,00169	2
0,00187	2,2
0,00204	2,4
0,00221	2,6
0,00238	2,8
0,00254	3
0,00272	3,2

Tabla de Campo Magnético en función de la intensidad.

Graficamos de siguiente manera:



Gráfica con los valores del campo magnético frente a la Intensidad.

Y los resultados:

```

cte_3: 8.552696e-04
S(cte_3): 4.972699024991103e-06
a: -1.7843137254902036e-05
S(a): 9.329610350270748e-06
Desviación Típica:2.0088719343954376e-05
r: 0.9999731565820301

μ: 1.2164820989408164e-06
s(μ): 1.629173698204095e-07

```

Así, resolvemos con que:

$$\mu = (1,22 \pm 0,16) \cdot 10^{-6}$$

5• Conclusión

Parte 1

Podemos observar, en las gráficas, que los valores experimentalmente tomados se adecuan de forma muy buena a los esperados, sobre todo teniendo en cuenta sus incertidumbres; al haber tratado con ellos en su momento y, puesto que solo había que evaluar principalmente su semejanza, los damos por concluidos.

Aún así, ya que gráficamente ya las hemos comparado, sus incertidumbres totales son:

$s(B) = 6,13 \cdot 10^{-5} T$	$s(B) = 5,43 \cdot 10^{-5} T$	$s(B) = 5,14 \cdot 10^{-5} T$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Parte 2

Sabemos ahora que debemos comparar el valor de μ obtenido con el mundialmente aceptado, así, tenemos la tabla:

μ experimental	μ teórico
$(1,19 \pm 0,10) \cdot 10^{-6}$	$\frac{4\pi}{10^7} = 1,26 \cdot 10^{-6}$
$(1,22 \pm 0,15) \cdot 10^{-6}$	
$(1,22 \pm 0,16) \cdot 10^{-6}$	

Pese a que la incertidumbre es ligeramente elevada, cumple que todos los valores están en un mismo intervalo que resulta que en él también se encuentra el valor “real”, por ello, resulta estimulante haber calculado una constante universal y no haber fallado en la misión.

6• Bibliografía

- *Colaboradores de Wikipedia. (2024, 26 marzo). Permeabilidad magnética. Wikipedia, la Enciclopedia Libre.*
https://es.wikipedia.org/wiki/Permeabilidad_magn%C3%A9tica#:~:text=La%20constante%20de%20permabilidad%20%CE%BC,magn%C3%A9tica%20en%20un%20vac%C3%ADo%20cl%C3%A1sico.
- *Handbook of Physics. (2002). En Springer eBooks. <https://doi.org/10.1007/0-387-21632-4>*